数理解析研究所講究録
641巻 1988年 245-254

Young図形，普遍指標，古典群の表現のテンソル積の分解公式について

青学大 小池 和彦 (Koike Kazuhiko)

この論説では 論文 [1], [2] 中の基本的概念について，成可く数式を使わずに説明し 最後に古典群の表現のテンソル積の分解公式をYoung図形のみを用いた公式で与える。

良く知られている様に 古典群の有理既約表現の同値類は大体 自然な形でYoung図形と一対一に対応づけられていた。最初に言葉を準備する。

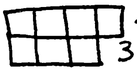
定義 非負整数の（有限又は無限の）減少列 λ

$\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n, \cdots)$; $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n \geqq \lambda_{n+1} \geqq \cdots$ で

$\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ s.t. $\lambda_k = 0$ for $\forall k > n$ なるものを"分割"と呼ぶ。分割全体の集合を"$\mathcal{P}$"で表わす。各 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し上の定義中の n の中最小のものを (i.e. $\lambda_n \neq 0$, $\lambda_{n+1}=0$) λ の"長さ"と云い $\ell(\lambda)$ で表わす。更に長さ n 以下の分割を

$\mathcal{P}^n := \{\lambda \in \mathcal{P} : \ell(\lambda) \leqq n\}$ とおく。

分割 $\lambda \in \mathcal{P}$ に対し 才一行目に λ_1 個の箱，才二行目に λ_2 個

の箱, ··· ,第 n 行目に λ_n 個の箱, ··· を左端を揃えて並べたものを"Young 図形"と云う。 例えば 分割 $\lambda=(4,3)$ と対応する Young 図形は  $^4_3$ である。 以下 分割と Young 図形とを同一視し λ により 分割も対応する Young 図形も表わすことにする。 以上の準備の下で 上の対応は 正確には

A型 $G=GL(n,\mathbb{C})$ の既約有理表現$/\sim$ $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n$
s.t. $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_n$

$G=GL(n,\mathbb{C})$ の既約多項式表現$/\sim$ $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\mathcal{P}^n$

(但し 多項式表現の意味は $X=(x_{ij})\in GL(n,\mathbb{C})$ の表現行列の係数が x_{ij} の多項式で表わせることを云う。)

B型 $G=SO(2n+1,\mathbb{C})$ の既約有理表現$/\sim$ $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\mathcal{P}^n$

C型 $G=Sp(2n,\mathbb{C})$ 〃 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\mathcal{P}^n$

D型 $G=SO(2n,\mathbb{C})$ 〃 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n$
s.t. $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_{n-1}\geqq|\lambda_n|$

で与えられる。我々の以下の目標は 古典群の表現論に現われる種々の公式を, Young 図形のみを用いた公式で与えることである。

我々の方法は, "指標" の間の関係を対称式の議論から導くことである。まず "指標"を定義する。

Gを古典群とし Gの極大トーラスTを一つとり固定する。

例1　$G = GL(n, \mathbb{C})$ のとき　$T = \{ diag(t_1, t_2, \cdots, t_n) : t_i \in \mathbb{C}^\times \}$
即ち　極大トーラスは対角行列全体.

例2　$G = Sp(2n, \mathbb{C}) = \{ g \in GL(2n, \mathbb{C}) : g J_{sp} {}^t g = J_{sp} \}$ のとき
但し　J_{sp} は歪対称行列　$J_{sp} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ -1 & & \end{smallmatrix} & 0 \end{pmatrix}$ である。この時
極大トーラス T は

$$T = \{ diag(t_1, t_2, \cdots, t_n, t_n^{-1}, t_{n-1}^{-1}, \cdots, t_2^{-1}, t_1^{-1}) ; \ t_i \in \mathbb{C}^\times \}$$

G の既約有理表現 $\rho : G \to GL(V)$ に対し　$Tr\, \rho|_T \in \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}]^W$　(但し Tr はトレースで $W = N_G(T)/T$ は Weyl群) を ρ の"指標"と呼ぶ。上の例1では $W \cong \mathfrak{S}_n$ で $\mathfrak{S}_n$ は t_i 達の置き換えとして作用する。上の例2では
$W = \langle \mathfrak{S}_n, \varepsilon_i \ (i = 1, 2, \cdots, n) \rangle$. 但し $\mathfrak{S}_n$ は t_i 達の置き換えで $\varepsilon_i : \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \cdots t_n^{\pm 1}] \to \mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \cdots, t_n^{\pm 1}]$ は $\varepsilon_i(t_j) = t_j$ if $j \neq i$ で $\varepsilon_i(t_i) = t_i^{-1}$ なる自己同型.

一般に

Th.　G : 古典群　　$\rho : G \to GL(V)$, $\rho' : G \to GL(V')$ を G の有理表現とするとき

$$Tr\, \rho|_T = Tr\, \rho'|_T \iff \rho \sim \rho' \ (\text{同値な表現})$$

が成立するから 指標を用いて議論すれば十分である。

Weylの指標公式により 古典群の指標は具体的に書き下せる。

§ $GL(n,\mathbb{C})$ の場合.

我々の議論は $GL(n,\mathbb{C})$ の多項式表現の場合に基づく。このときには対称式の議論により種々のことが分かっている。

Def. $\lambda\in\mathcal{P}^n$ に対し $GL(n,\mathbb{C})$ の λ に対応する既約表現の指標を $\lambda_{GL(n)}\in\mathbb{Z}[t_1,t_2,\cdots,t_n]^{\mathfrak{S}_n}$ で表わす。$\lambda_{GL(n)}$ は Schur 関数と呼ばれる.

(注意 $\lambda_{GL(n)}$ は多項式表現の指標より極大トーラスへの制限も多項式になる。)

テンソル積 $\rho_\mu\otimes\rho_\nu$ (ρ_μ,ρ_ν は $\mu,\nu\in\mathcal{P}^n$ に対応する既約表現) を分解する問題は, 指標の言葉では積 $\mu_{GL(n)}\nu_{GL(n)}$ を $\{\lambda_{GL(n)}\}$ の和で表わす問題になる。$GL(n,\mathbb{C})$ の場合にこの組合せ論的法則を云い当てたのが Littlewood-Richardson rule である。

以下 Zelevinsky, Macdonald 等が整理した形で詳述する.

Def. $\Lambda_n:=\mathbb{Z}[t_1,t_2,\cdots,t_n]^{\mathfrak{S}_n}$ ($\mathbb{Z}$ 上の対称多項式環) を自然な grading により graded algebra とみなし $m>n$ $(m,n\in\mathbb{N})$ に対し graded algebra としての準同型 $\rho_{m,n}:\Lambda_m\longrightarrow\Lambda_n$ を $f(t_1,t_2,\cdots,t_n,t_{n+1},\cdots,t_m)\in\Lambda_m$ に対し $\rho_{m,n}(f(t_1,\cdots,t_m))=f(t_1,\cdots,t_n,0,0\cdots0)$ により定義する。これにより $(\Lambda_n,\rho_{m,n})$ は射影系をなす。

$\Lambda:=\varprojlim\Lambda_n$ (graded algebra としての射影極限) とおき Λ を"普遍指標環"と呼ぶ。

Λ の元は次数有界な無限変数の対称式と考えられる。

例. $\Lambda_n \ni e_r(t_1,\cdots,t_n) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n} t_{i_1}t_{i_2}\cdots t_{i_r}$ (基本対称式) とおくと $\{e_r(t_1,\cdots,t_n)\}$は proj. sys をなす。(但し $r>n$ なら $e_r=0$ と考える。)

よって $\Lambda \ni {}^{\exists}e_r = \varprojlim e_r(t_1,\cdots,t_n)$. e_rは丁度 形式的無限和 $e_r = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r} t_{i_1}\cdots t_{i_r}$ と考えることができ n 次の part Λ_n への射影を得るには $t_{n+1}=t_{n+2}=\cdots=0$ とおけば良い。

ここで著しいことは

Lemma ${}^{\forall}\lambda\in P$ に対し $\ell(\lambda)\leq n$ なる n に対して $\lambda_{GL(n)}\in\Lambda_n$ $\ell(\lambda)>n$ なる n に対して $\lambda_{GL(n)}=0\in\Lambda_n$ とおくと $\{\lambda_{GL(n)}\}$ は射影系をなす。

即ち $\lambda_{GL(n+r)}(t_1,t_2,\cdots,t_n,0,0,\cdots 0) = \lambda_{GL(n)}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ if $n\geq \ell(\lambda)$

Def. $\lambda_{GL} = \varprojlim \lambda_{GL(n)}$ $(\in\Lambda)$ を $\lambda\in P$ に対する "universal character (of GL)" と呼ぶ。

ここで

Prop $\{\lambda_{GL}\}_{\lambda\in P}$ はΛの $\mathbb{Z}$-free basis をなす。

この基底に関するΛの構造定数を $LR^{\lambda}_{\mu\nu}$ で表わし "Littlewood-Richardson係数"と呼ぶ。即ち

$$\mu_{GL}\cdot\nu_{GL} = \sum_{\lambda\in P} LR^{\lambda}_{\mu\nu}\,\lambda_{GL} \quad \cdots (*)$$

自然な射影 $\pi_n : \Lambda \longrightarrow \Lambda_n = \mathbb{Z}[t_1,t_2,\cdots,t_n]^{\mathfrak{S}_n}$ とおくと

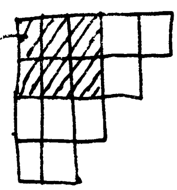
$$\pi_n(\lambda_{GL}) = \begin{cases} \lambda_{GL(n)} & \text{if } n\geq\ell(\lambda) \\ 0 & \text{if } n<\ell(\lambda) \end{cases}$$ より $\mu,\nu\in P^n$ に対し

$$\mu_{GL(n)}\cdot\nu_{GL(n)} = \sum LR^{\lambda}_{\mu\nu}\,\lambda_{GL(n)}$$

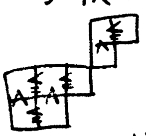
即ち $GL(n,\mathbb{C})$の多項式表現のテンソル積の分解公式を得る。
但し $\ell(\lambda)>n$ のとき $\lambda_{GL(n)}=0$ と右辺で考えている。
Λ中で定式化する利点は 一度Λ中での公式を得るとπ_nを施すことにより全てのrankの$GL(n,\mathbb{C})$で有効な公式が得られることである。

以下 この$LR^{\lambda}_{\mu\nu}$を計算するLittlewood-Richardson ruleについて述べる。

(1) $LR^{\lambda}_{\mu\nu}=0$ unless "$\lambda\supseteq\mu$ and $\lambda\supseteq\nu$ and $|\lambda|=|\mu|+|\nu|$"
ここで $|\lambda|=\sum\lambda_i$ i.e. Young図形λの箱の数を表わす。

(2) $\lambda\supseteq\mu$ and $\lambda\supseteq\nu$ and $|\lambda|=|\mu|+|\nu|$ のとき
$\lambda\supseteq\mu$ とは $\lambda_i\geqq\mu_i$ for $\forall i$ より Young図形λ中 部分図形 μ 部分を取り除く。例えば $\lambda=(5,4,3,2)$, $\mu=(3,3)$ ならば μ  λ である。$LR^{\lambda}_{\mu\nu}$は残った箱に
1をν_1個, 2をν_2個, ..., rをν_r個, ... 次の(※)をみたす様に書き入れる仕方の数である。

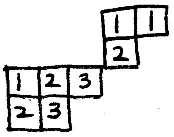
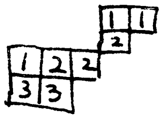
(※) 1) 横には単調非減少, 縦には単調増加, i.e. 上の例では



2) $d_k(i):=\{k$列目以降に書き込まれたiの数$\}$ とおくと

$$d_k(1)\geqq d_k(2)\geqq\cdots\geqq d_k(r)\geqq\cdots\quad \text{for } \forall k=1,2,3,\cdots.$$

例えば上の例で $\nu=(3,3,2)$ とおくと

 は(※)の条件をみたすが  は $k=2$ で

$d_k(2) > d_k(1)$ となるので (※) の条件の 3)をみたさない。

§他の型の古典群の場合.

以下 $Sp(2n,\mathbb{C})$ の場合を中心に述べるが B_n型, D_n型 即ち $SO(n,\mathbb{C})$でも 全く同様のことが成立する。

Def. 環準同型 $\pi_{Sp(2n)} : \Lambda \longrightarrow R(Sp(2n,\mathbb{C})) = \mathbb{Z}[x_1^{\pm1}, x_2^{\pm1}, \dots, x_n^{\pm1}]^{W_n}$ (ここで $R(Sp(2n,\mathbb{C}))$は $Sp(2n,\mathbb{C})$の指標環, W_n は $Sp(2n,\mathbb{C})$のWeyl群)を 準同型の合成

$$\pi_{Sp(2n)} : \Lambda \xrightarrow{\pi_{2n}} \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_{2n}]^{\mathfrak{S}_{2n}} (= R_+(GL(2n))) \xrightarrow{r_*} R(Sp(2n,\mathbb{C}))$$

により定義する。 この $\pi_{Sp(2n)}$を specialization homomorphism と呼ぶ。

この時 次が成立する

定理 各$\lambda \in \mathcal{P}$に対し $\lambda_{Sp} \in \Lambda$ で

$$\pi_{Sp(2n)}(\lambda_{Sp}) = \begin{cases} \lambda_{Sp(2n)} & \text{if } \ell(\lambda) \leqq n \\ 0 \text{ 又は } \pm\{\text{既約指標}\} & \text{if } \ell(\lambda) > n \end{cases}$$

なる元が一意的に存在する。 $\ell(\lambda) > n$ のときの像 $\pi_{Sp(2n)}(\lambda_{Sp})$ もYoung図形を用いて簡単に記述できる。

この $\{\lambda_{Sp}\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ を "universal character (of Sp)" と呼ぶ。

但し 定理中の $\lambda_{Sp(2n)}$ は $\lambda \in \mathcal{P}^n$ に対応する $Sp(2n)$ の既約

指標である。

以下 $\ell(\lambda)<n$ のとき $\pi_{Sp(2n)}(\lambda_{Sp})$ の計算法を与えよう。

$\lambda\in\mathcal{P}$ に対し 入の転置 $\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\cdots,\lambda'_r)$ とする

(1) $k_i := \lambda'_i-(i-1)$ $(1\leqq i\leqq r)$ とおく

(2) if $^\exists i$ s.t. $k_i=n+1$, then $\pi_{Sp(2n)}(\lambda_{Sp})=0$

(3) (2)でないとき $\quad \ell_i := (n+1)-(k_i-(n+1))$ if $k_i>n+1$

$\ell_i := k_i$ if $k_i<n+1$

更に $s=\#\{i : k_i>n+1\}$ とおく。

(4) if $^\exists i\neq{}^\exists j$ s.t. $\ell_i=\ell_j$, then $\pi_{Sp(2n)}(\lambda_{Sp})=0$

(5) (4)でないとき ℓ_i 達を大きさの順に並べ換える。i.e.

$^\exists\sigma\in\mathfrak{S}_r$ (r次対称群) s.t. $\ell_{\sigma(1)}>\ell_{\sigma(2)}>\cdots>\ell_{\sigma(r)}$

(6) $\mu'_1=\ell_{\sigma(1)}$, $\mu'_2=\ell_{\sigma(2)}+1$, $\cdots$ $\mu'_i=\ell_{\sigma(i)}+(i-1)$, $\cdots$ $\mu'_r=\ell_{\sigma(r)}+r-1$

とおく。

(7) if $^\exists i$ s.t. $\mu'_i<0$, then $\pi_{Sp(2n)}(\lambda_{Sp})=0$

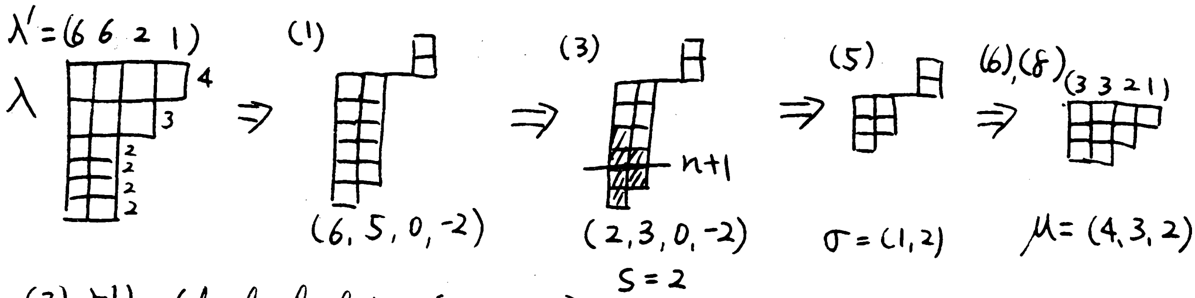
(8) (7)でないとき $\mu\in\mathcal{P}$ を μ の転置 $\mu'=(\mu'_1,\mu'_2,\cdots,\mu'_r)$

(μ'_i は (6)で定義したもの)なる分割とすると

$$\pi_{Sp(2n)}(\lambda_{Sp}) = (-1)^s\, \mathrm{sgn}\,\sigma\, \mu_{Sp(2n)}$$

(s は(3)の s, σ は(5)の $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ $\mathrm{sgn}\,\sigma$ は σ の符号を表す。)

例 $\lambda=(4,3,2^4)$ $\quad n=3$ のとき $\lambda'=(6,6,2,1)$ である。(1)より $(k_1,k_2,k_3,k_4)=(6,6,2,1)-(0,1,2,3)$ $=(6,5,0,-2)$.



(3) より $(l_1, l_2, l_3, l_4) = (2, 3, 0, -2)$.

(5) より $(l_2, l_1, l_3, l_4) = (3, 2, 0, -2)$　$\therefore \mu' = (3, 3, 2, 1)$

よって　$\pi_{sp(6)}((4, 3, 2^4)_{sp}) = -(4, 3, 2)_{sp(6)}$.

更に次も λ_{sp} の具体的な定義式より分る。

Prop. $\{\lambda_{sp}\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ は Λ の $\mathbb{Z}$ free basis.

定理より $\pi_{sp(2n)}(\lambda_{sp})$ の像は簡単に分かるから Λ 中で λ_{sp} に関する公式を与えれば $\pi_{sp(2n)}$ を施こすことにより全ての rank n で有効な $Sp(2n)$ の公式を得る。特に $Sp(2n)$ の既約表現のテンソル積の分解公式を得るには 基底 $\{\lambda_{sp}\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ に関する Λ の構造定数を求めれば良い。

定理 (c.f. Littlewood, Newell, Koike)

$$\mu_{sp} \nu_{sp} = \sum C^{\lambda}_{\mu\nu} \lambda_{sp} \qquad C^{\lambda}_{\mu\nu} \in \mathbb{Z}$$

とおくとき $C^{\lambda}_{\mu,\nu}$ は

$$C^{\lambda}_{\mu\nu} = \sum_{\alpha, \zeta, \eta \in \mathcal{P}} LR^{\mu}_{\alpha\zeta}\, LR^{\nu}_{\alpha\eta}\, LR^{\lambda}_{\zeta\eta}$$

で与えられる。

注意 1°) 実は上の議論は 系列 $SO(n)$ に対しても全く同様に進み (Bn型と Dn型は $\lambda \in \mathcal{P}$ に対して同じ普遍指標をもつ)

$\mu_{SO} \nu_{SO} = \sum B^{\lambda}_{\mu\nu} \lambda_{SO}$ とおくとき

$C^{\lambda}_{\mu\nu} = B^{\lambda}_{\mu\nu}$ が示される。ここで λ_{SO} は "universal character of SO" である。

上の定理に $\pi_{Sp(2n)}$ を施こすと $\mu, \nu \in \mathcal{P}^n$ に対して

$$\mu_{Sp(2n)}\,\nu_{Sp(2n)} = \sum C^{\lambda}_{\mu\nu}\,\pi_{Sp(2n)}(\lambda_{Sp})$$

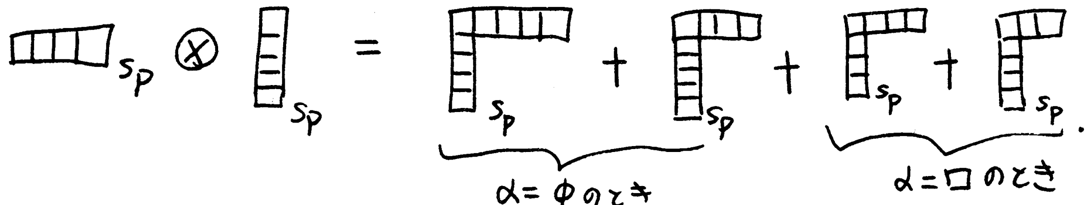
(具体的なテンソル積の分解公式)を得る。

特に $n \geqq \ell(\mu)+\ell(\nu)$ ならば

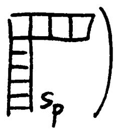
$$\mu_{Sp(2n)}\,\nu_{Sp(2n)} = \sum C^{\lambda}_{\mu\nu}\,\lambda_{Sp(2n)}$$

となり テンソル積の分解は rank に依らない。

例



$n \geqq 6$ ならば この例で Sp を Sp(2n) と置き換えて テンソル積の分解公式が成立する。 $n=5$ のときのみ

$\pi_{Sp(10)}\Big($  $\Big) = 0$ となる。

文 献

[1] K. Koike and I. Terada, "Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of the type B_n, C_n, D_n". J. of Alg., 1987 Vol 106 no2.

[2] K. Koike "On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups" to appear in "Adv. in Math."